УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЗАЛИПАЮЩИХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ, УСТАНОВЛЕННЫХ МЕТОДОМ УСРЕДНЕНИЯ В РАЗРЫВНЫХ СИСТЕМАХ. I. ГЛАДКИЕ ВНЕ РАЗРЫВОВ СИСТЕМЫ

О.Ю. Макаренков

Аннотация. В настоящей работе утверждение второй теоремы Н.Н. Боголюбова о периодических решениях гладких систем с малым параметром обосновывается для разрывных систем, в которых порождающее решение пересекает гиперплоскости разрыва трансверсально и которые непрерывно дифференцируемы вне этих гиперплоскостей. Данная ситуация имеет место в системах с сухим трением в отсутствии залипания и упругих ограничителей. В качестве иллюстрации доказывается устойчивость колебаний скорости тела, перемещаемого вибрациями.

0.1 Введение

Рассмотрим систему

$$\dot{x} + h(t,x) = \varepsilon f(t,x,\varepsilon), \tag{1}$$

где $h \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ и f – T-периодическая по времени непрерывно дифференцируемая функция, терпящая разрывы 1-го рода в таких точках (t,x,ε), в которых некоторые компоненты x обращаются в нуль (см. условие (A1) ниже). В предположении, что порождающая система

$$\dot{x} + h(t,x) = 0 \tag{2}$$

допускает только T-периодические решения, настоящая статья изучает существование, единственность и устойчивость T-периодических решений системы (1). Известной T-периодической заменой переменных (см. замену 7 ниже) система (1) приводится к стандартной форме принципа усреднения. Соответственно, в случае, когда $f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times [0,1], \mathbb{R}^n)$, поставленная задача полностью решена Н.Н. Боголюбовым в его второй теореме (см. [2], Ч.1, §5, Теорема II).

Принцип усреднения для нахождения периодических колебаний в разрывных системах до сих пор применялся либо без обоснования (см. [3]), либо без обоснования устойчивости (см. [4]), либо на основании негладкого аналога первой теоремы Н.Н. Боголюбова (см. [1], [5], [8]). Такой аналог впервые предложен В.А. Плотниковым [10] и позволяет убедиться, что динамика системы (1) близка к T-периодической на временном интервале порядка $[0, 1/\varepsilon]$ и не гарантирует, что динамика системы действительно T-периодическая и, тем более, устойчивая на всем $[0, +\infty)$. Результат настоящий статьи впервые гарантирует последнее свойство. В качестве иллюстративного примера в работе доказывается

T-периодичность и устойчивость колебаний скорости тела, перемещаемого под действием периодических вибраций, что было ранее установлено А. Фидлиным [5] на интервале $[0, 1/\varepsilon]$.

Предлагаемый результат получен прямым методом склейки оператора сдвига по траекториям системы (1) из его фрагментов на гладких областях. Используя решения вспомогательных задач Коши с векторным временем (см. лемму 0.2), доказано, что оператор Пуанкаре системы (1) дифференцируем по фазовой переменной и параметру $\varepsilon > 0$. Далее, используя сходимость правой части при уменьшении $\varepsilon > 0$ по мере (см. следствие 0.2), установлено равенство классической функции усреднения и производной оператора Пуанкаре по ε в $\varepsilon = 0$. Это позволило связать свойства собственных значений нулей функции усреднения с такими свойствами оператора Пуанкаре, которые достаточны для анализа устойчивости его неподвижных точек методами теории динамических систем.

0.2 Основной результат

На протяжении статьи ξ^j является j-й компонентой вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$, $x(\cdot, \xi, 0)$ обозначает решение порождающей системы (2) с начальным условием $x(0) = \xi$ и $B_r(\zeta)$ – это шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса $r > 0$ с центром в точке $\zeta \in \mathbb{R}^n$. Результат статьи применим к разрывным системам, удовлетворяющим следующим аналогичным предположениям А. Фидлина [5] условиям.

(A1) Положим $\mathbb{R}^n_s = \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : \mathrm{sign}(\xi^j) = s^j, j \in \overline{1,n}\right\}$, $s \in \{-1,1\}^n = \underbrace{\{-1,1\} \times \ldots \times \{-1,1\}}_{n \text{ штук}}$. Существует 2^n функций $f_s \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times [0,1], \mathbb{R}^n)$, $s \in \{-1,1\}^n$ таких, что

$$f(t,\xi,\varepsilon) = f_s(t,\xi,\varepsilon), \quad (t,\xi,\varepsilon) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n_s \times [0,1],\ s \in \{-1,1\}^n.$$

Следующие два условия предъявляются к такому $x(\cdot, \xi_0, 0)$, которое, ожидается, будет порождающим, но часто они выполнены или нет сразу для всех решений системы (2).

(A3) Множество точек $S \subset \mathbb{R}^n \backslash \cup_{s \in \{-1,1\}^n} \mathbb{R}^n_s$, в которых функция $\xi \mapsto f(t,\xi,\varepsilon)$ не является непрерывно дифференцируемой, не зависит от t и ε, и для любых $j \in \overline{1,n}$ и $t \in \mathbb{R}$ существует $p \in \overline{1,n}$ такое, что функция $\xi \mapsto f^j(t, \xi^1, ..., \xi^{p-1}, 0 \cdot \xi^p, \xi^{p+1}, ..., \xi^n, \varepsilon)$ непрерывно дифференцируема в точке $x(t, \xi_0, 0)$.

(A2) Предположим, что множество $\{t \in [0,T] : x(t,\xi_0,0)\} \in S$ конечно и занумеруем его элементы как $0 \le t_1 < ... < t_m < T$. Пусть $t_1 > 0$ и для любых $j \in \overline{1,n}$ и $i \in \overline{1,m}$ таких, что $x^j(t_i, \xi_0, 0) = 0$ и $\{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi^j = 0\} \subset S$, имеем $(x^j)'_t(t_i, \xi_0, 0) \neq 0$.

Поскольку система (1) может вообще не иметь дифференцируемого на всем временном промежутке решения, нам следует принять несколько более общее определение.

Определение 1. *Решением системы (1) называется непрерывная функция x, дифференцируемая всюду, за исключением, быть может, множества $\{t : x(t) \in S\}$ и удовлетворяющая всюду, кроме, быть может, этого множества, системе (1).*

Данное определение позволяет не ограничивая общности считать, что функция f ограничена на каждом ограниченном множестве.

Лемма 0.1 *Пусть $h \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ и f удовлетворяет условию (A1). Пусть $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ таково, что выполнены условия (A2)-(A3). Тогда существует $\delta > 0$ такое, что при всех $\varepsilon \in [0, \delta]$, $v \in B_\delta(\xi_0)$ система (1) имеет единственное решение $t \mapsto x(t, \xi, \varepsilon)$ с начальным условием $x(0, \xi, \varepsilon) = \xi$. Это решение продолжимо на $[0, T]$ и непрерывно дифференцируемо по $(\xi, \varepsilon) \in B_\delta(\xi_0) \times [0, \delta)$. Кроме того,*

$$\left\{t : x^j(t, \xi, \varepsilon) = 0\right\} \subset \bigcup_{i=1}^{m} \left\{T_i^j(\xi, \varepsilon)\right\}, \quad j \in \overline{1, n},$$

где $T_i^j \in C^1(B_\delta(\xi_0) \times B_\delta(0), \mathbb{R}^n)$ и $T_i^j(\xi_0, 0) = t_i$ при всех $i \in \overline{1, m}$ и $j \in \overline{1, n}$.

Для доказательства леммы 0.1 нам понадобится следующее вспомогательное утверждение, в котором $1_{\mathbb{R}^n}$ – это n-мерный вектор, состоящий из единиц, и для произвольных $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ запись $g(t 1_{\mathbb{R}^n} + \overrightarrow{\xi})$ обозначает следующее

$$g(t 1_{\mathbb{R}^n} + \overrightarrow{\xi}) = \begin{pmatrix} g^1(t + \xi^1) \\ \vdots \\ g^n(t + \xi^n) \end{pmatrix}.$$

Лемма 0.2 *Пусть $F \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times [0, 1], \mathbb{R}^n)$. Тогда для любых $t_* \in \mathbb{R}$ и $\xi_* \in \mathbb{R}^n$ существует $\gamma > 0$ такое, что при любых $\Delta \in B_\gamma(0)$, $\xi \in B_\gamma(\xi_*)$, $\varepsilon \in [0, \gamma)$, задача*

$$\dot{x} = F(t, x, \varepsilon), \tag{3}$$

$$x(t_* 1_{\mathbb{R}^n} + \overrightarrow{\Delta}) = \xi_* \tag{4}$$

имеет единственное решение $t \mapsto x(t, t_* 1_{\mathbb{R}^n} + \overrightarrow{\Delta}, \xi, \varepsilon)$, определенное на $\mathbb{R}$. Более того, функция x непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R} \times B_\gamma(t_* 1_{\mathbb{R}^n}) \times B_\gamma(\xi_*) \times [0, \gamma)$.

Доказательство. Обозначим через $\widetilde{x}(\cdot, t_*, \zeta, \varepsilon)$ решение системы (3) с начальным условием $x(t_*) = \zeta$. Рассмотрим функцию

$$\Phi(\Delta, \zeta, \xi, \varepsilon) = \widetilde{x}(t_* + \overrightarrow{\Delta}, t_*, \zeta, \varepsilon) - \xi,$$

непрерывно дифференцируемую на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [0, 1]$. Имеем $\Phi(0, \xi_*, \xi_*, 0) = 0$ и $\det\|\Phi'_\xi(0, \xi_*, \xi_*, 0)\| = \det\|I\| \neq 0$. Поэтому, из теоремы о неявной функции следует существование $\gamma > 0$ и функции $(\Delta, \xi, \varepsilon) \mapsto \zeta(\Delta, \xi, \varepsilon)$, непрерывно дифференцируемой на

$B_\gamma(0) \times B_\gamma(\xi_*) \times [0,\gamma)$ и удовлетворяющей условию

$$\Phi(\Delta, \zeta(\Delta,\xi,\varepsilon),\xi,\varepsilon) = 0, \quad \|\Delta\| < \gamma,\ \|\xi - \xi_*\| < \gamma,\ \varepsilon \in [0,\gamma).$$

Искомая функция x дается формулой

$$x(t, t_* 1_{\mathbb{R}^n} + \overrightarrow{\Delta}, \xi, \varepsilon) = \widetilde{x}(t, t_*, \zeta(\Delta,\xi,\varepsilon), \varepsilon),$$

и справедливость соотношения (4) проверяется непосредственно. □

Доказательство леммы 0.1. Доказательство проводится в два этапа. На первом этапе строятся фрагменты решения системы (1), проходящего в окрестности решения $x(\cdot,\xi_0,0)$ и компоненты которого определены на подходящих окрестностях интервалов (t_{i-1},t_i). На втором этапе искомое решение склеивается из полученных фрагментов.

I этап. Обозначим $t_0 = 0$, $t_{m+1} = T$, зафиксируем произвольное $i \in \overline{1,m+1}$, положим $(t_*,\xi_*) = (t_{i-1}, x(t_{i-1},\xi_0,0))$ и применим лемму 0.2 к системе

$$\dot{x} + h(t,x) = \varepsilon f_s(t,x,\varepsilon), \tag{5}$$

где $s^j = \lim\limits_{t\to t_{i-1}+0} \mathrm{sign}\,(x^j(t,\xi_0,0))$, $j \in \overline{1,n}$. Пусть $\gamma > 0$ – то число, а $\widetilde{x}_i(t, t_{i-1}1_{\mathbb{R}^n} + \overrightarrow{\Delta}, \xi, \varepsilon)$ – та функция, о которых говорится в лемме 0.2. Обозначим через $\nu_1, ..., \nu_{k_i}$ номера компонент порождающего решения $x(\cdot,\xi_0,0)$, обращающиеся в нуль при $t = t_i$. Из условия (A3) следует, что

$$(\widetilde{x}_i^j)'_t(t_i, t_{i-1}1_{\mathbb{R}^n}, \xi_*, 0) = (x^j)'_t(t_i,\xi_0,0) \neq 0, \quad j \in \{\nu_1, ..., \nu_{k_i}\}.$$

Поэтому, теорема о неявной функции позволяет утверждать, что существует $0 < \delta_i < \gamma$ и k_i функций $t_i^j : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}$, $j \in \{\nu_1, ..., \nu_{k_i}\}$, удовлетворяющих условиям (см. рис. 1):

а) $t_i^j \in C^1(B_\delta(t_{i-1}1_{\mathbb{R}^n}) \times B_\delta(\xi_*) \times [0,\delta), \mathbb{R}^n)$,

б) $t_i^j(0,\xi_*,0) = t_i$,

в) $\widetilde{x}_i^j(t_i^j(\Delta,\xi,\varepsilon), t_{i-1}1_{\mathbb{R}^n} + \Delta, \xi, \varepsilon) = 0$, $\|\Delta\| < \delta_i$, $\xi \in B_{\delta_i}(\xi_*)$, $\varepsilon \in [0,\delta_i)$.

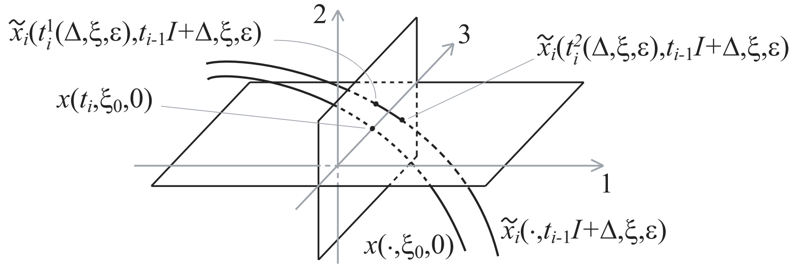

Рис. 1. Иллюстрация возможного поведения решения $\widetilde{x}$, приводящего к разветвлению момента времени t_i на две функции t_i^1 и t_i^2, то есть к ситуации, когда разные компоненты $\xi \mapsto f^{j_1}(t,\xi,\varepsilon)$ и $\xi \mapsto f^{j_2}(t,\xi,\varepsilon)$ имеют разрывы в одной и той же точке $x(t_i,\xi_0,0)$. Такой случай допускается условиями (A2)-(A3) и реализуется в системах с трением с несколькими степенями свободы (см. [3]).

В силу единственности неявной функции, $\delta_i > 0$ может быть уменьшено ещё и так, что $\widetilde{x}_i^j(t, t_{i-1}1_{\mathbb{R}^n} + \Delta, \xi, \varepsilon) \neq 0$ при всех $t \in (t_{i-1} + \Delta^j, t_i^j(\Delta, \xi, \varepsilon))$, $j \in \{\nu_1, ..., \nu_{k_i}\}$, $\|\Delta\| < \delta_i$, $\|\xi - \xi_*\| < \delta_i$, $0 \leq \varepsilon < \delta_i$. Для оставшихся компонент t_i определим как

$$t_i^j(\Delta, \xi, \varepsilon) := t_i, \quad \Delta, \xi \in \mathbb{R}^n,\ \varepsilon \in [0,1],\ j \in \overline{1,n} \backslash \{\nu_1, ..., \nu_{k_i}\} \tag{6}$$

и уменьшим $\delta_i > 0$, если необходимо, так, что $\widetilde{x}^j(t, t_{i-1}1_{\mathbb{R}^n} + \Delta, \xi, \varepsilon) \neq 0$ при всех $t \in (t_{i-1} + \Delta^j, t_i^j(\Delta, \xi, \varepsilon)]$, $j \in \overline{1,n} \backslash \{\nu_1, ..., \nu_{k_i}\}$, $\|\Delta\| < \delta_i$, $\|\xi - \xi_*\| < \delta_i$, $0 \leq \varepsilon < \delta_i$.

II этап. Двигаясь от $i = m+1$ до $i = 2$, уменьшим $\delta_{i-1} > 0$ одно за другим так, чтобы

$$\begin{aligned}
&\|\widetilde{x}_{i-1}(t_{i-1}(\Delta, \xi, \varepsilon), t_{i-2}1_{\mathbb{R}^n} + \Delta, \xi, \varepsilon) - x(t_{i-1}, \xi_0, 0)\| < \delta_i, \\
&\|t_{i-1}(\Delta, \xi, \varepsilon) - t_{i-1}\| < \delta_i, \\
&\text{при всех} \|\Delta\| < \delta_{i-1}, \|\xi - x(t_{i-2}, \xi_0, 0)\| < \delta_{i-1}, 0 \leq \varepsilon < \delta_{i-1}.
\end{aligned}$$

В помощь читателю мы подробно выписываем первые итерации построения функции x, но мелким шрифтом. Итак, для каждого $j \in \overline{1,n}$, $\|\xi - \xi_0\| \leq \delta_1$ и $0 \leq \varepsilon < \delta_1$ положим

$$\begin{aligned}
&x^j(t, \xi, \varepsilon) := \widetilde{x}_1^j(t, 0, \xi, \varepsilon), \\
&\text{при всех } t \in [0, t_1^j(0, \xi, \varepsilon)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&x^j(t, \xi, \varepsilon) := \widetilde{x}_2^j(t, t_1(0, \xi, \varepsilon), x(\overrightarrow{t}_1(0, \xi, \varepsilon), \xi, \varepsilon), \varepsilon), \\
&\text{при всех } t \in [t_1^j(0, \xi, \varepsilon), t_2^j(t_1(0, \xi, \varepsilon) - t_1, x(t_1(0, \xi, \varepsilon), \xi, \varepsilon), \varepsilon)].
\end{aligned}$$

Далее, используя обозначение

$$T_2^j(v, \varepsilon) = t_2^j(t_1(0, \xi, \varepsilon) - t_1, x(t_1(0, \xi, \varepsilon), \xi, \varepsilon), \varepsilon),$$

построение продолжается как

$$\begin{aligned}
&x^j(t, \xi, \varepsilon) := \widetilde{x}_3^j(t, T_2(\xi, \varepsilon), x(\overrightarrow{T}_2(\xi, \varepsilon), \xi, \varepsilon), \varepsilon), \\
&\text{при всех } t \in [T_2^j(\xi, \varepsilon), t_3^j(T_2^j(\xi, \varepsilon) - t_2, x(T_2(\xi, \varepsilon), \xi, \varepsilon), \varepsilon)].
\end{aligned}$$

Общая итерационная формула для определения $x(t, \xi, \varepsilon)$ при произвольных $t \in [0, T]$, $\|\xi - \xi_0\| < \delta_1$, $0 \leq \varepsilon < \delta_1$ и $i = 1, ..., m+1$ выписывается как

$$\begin{aligned}
&x^j(t, \xi, \varepsilon) := \widetilde{x}_i^j(t, T_{i-1}(\xi, \varepsilon), x(\overrightarrow{T}_{i-1}(\xi, \varepsilon), \xi, \varepsilon), \varepsilon), \\
&\text{при всех } t \in [T_{i-1}^j(\xi, \varepsilon), T_i^j(\xi, \varepsilon)],
\end{aligned}$$

где $T_i(\xi, \varepsilon) = t_i(T_{i-1}(\xi, \varepsilon) - t_{i-1}, x(T_{i-1}(\xi, \varepsilon), \xi, \varepsilon))$, $T_1(\xi, \varepsilon) = t_1(0, \xi, \varepsilon)$, $T_0(\xi, \varepsilon) = 0$. При этом из (6) имеем $T_{m+1}^j = T$ для любого $j \in \overline{1,n}$. Так как $\widetilde{x}_i \in C^1(\mathbb{R} \times B_{\delta_1}(t_{i-1}1_{\mathbb{R}^n}) \times B_{\delta_1}(x(t_{i-1}, \xi_0, 0)) \times [0, \delta_1), \mathbb{R}^n)$ и $t_i \in C^1(B_{\delta_1}(0) \times B_{\delta_1}(x(t_{i-1}, \xi_0, 0)) \times [0, \delta_1), \mathbb{R}^n)$, то $z(t, \cdot), T_i \in C^1(B_{\delta_1}(x(t_{i-1}, \xi_0, 0)) \times [0, \delta_1), \mathbb{R}^n)$ при всех $i \in \overline{1,m}$, $t \in [0, T]$.

Для завершения доказательства нам остается обосновать единственность построенного решения. Для этого достаточно показать, что при любом $i \in \overline{1,m}$ и достаточно малом $\gamma > 0$ часть $x((t_*, t_* + \gamma))$ решения x системы (1) с начальным условием $x(t_*) = \xi$, где $|t_* - t_i| < \gamma$, $\|\xi - \xi_0\| < \gamma$ и $\xi, x(t_i, \xi_0, 0) \in S$, лежит в том же множестве $\mathbb{R}_s^n$, что и $x((t_i, t_i + \gamma), \xi_*, 0)$ (как это имеет место для построенного решения $t \mapsto x(t, \xi, \varepsilon)$). В силу принятого определения решения системы (1) можем считать, что решение x непрерывно дифференцируемо на $(t_*, t_* + \gamma)$. Но тогда, считая $\varepsilon > 0$ достаточно малым, получаем, что значения $x'(t)$, $t \in (t_*, t_* + \gamma)$ и $x_t'(t, \xi_*, 0)$, $t \in (t_i, t_i + \gamma)$ сколь угодно близки. Требуемое

утверждение теперь легко следует из трансверсальности $t \mapsto x(t, \xi_0, 0)$ по отношению к S в точке t_i, вытекающей из $(A3)$. $\square$

Лемма 0.1 позволяет ввести при малых $\varepsilon > 0$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ близких к ξ_0 следующую функцию

$$u(t, \xi, \varepsilon) = x^{-1}(t, x(t, \xi, \varepsilon), 0), \tag{7}$$

где $x^{-1}(t, \cdot, 0)$ – обратный к $x(t, \cdot, 0)$ оператор (то есть $x(t, x^{-1}(t, \xi, 0), 0) = x^{-1}(t, x(t, \xi, 0), 0) = \xi$), существующий в силу гладкости порождающей системы (2). Замена (7) приводит (1) к стандартной форме принципа усреднения

$$\dot{u} = \varepsilon(x'_u(t, u, 0))^{-1} f(t, x(t, u, 0), \varepsilon). \tag{8}$$

Решения системы (8) будем понимать в смысле определения 1. В частности функция $t \mapsto u(t, \xi, \varepsilon)$ является решением системы (8) и, в силу леммы 0.1, непрерывно дифференцируемо по (ξ, ε) достаточно близким к $(\xi_0, 0)$. Нам понадобится ряд свойств правой части системы (8), которые мы сейчас выведем из леммы 0.1.

Следствие 0.1 *В условиях леммы 0.1 функция*

$$t \mapsto (x'_u(t, \xi, 0))^{-1} f(t, x(t, \xi, 0), 0)$$

суммируема на $[0, T]$ при всех $\|\xi - \xi_0\| < \delta$.

Доказательство. Утверждение следует из суммируемости функции $t \mapsto f(t, x(t, \xi, 0), 0)$, которая, в силу леммы 0.1, непрерывна на $[0, T]$ всюду, кроме, быть может, точек $\cup_{i \in \overline{1,m}, j \in \overline{1,n}} \{T_i^j(\xi, 0)\}$. $\square$

Данное следствие позволяет ввести в рассмотрение классическую функцию усреднения

$$\overline{f}(\xi) = \int_0^T (x'_u(\tau, \xi, 0))^{-1} f(\tau, x(\tau, \xi, 0), 0) d\tau, \quad \|\xi - \xi_0\| < \delta.$$

Следствие 0.2 *В условиях леммы 0.1 при всех $\xi \in B_\delta(\xi_0)$ и $\sigma > 0$ справедливо соотношение*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{mes}\, \{t \in [0, T] : \|f(t, x(t, u(t, \xi, \varepsilon), 0), \varepsilon) - f(t, x(t, \xi, 0), 0)\| \geq \sigma\} = 0.$$

Доказательство. Зафиксируем $j \in \overline{1, n}$, $\sigma > 0$, $\xi \in B_\delta(\xi_0)$ и $\gamma > 0$. Выберем $\varepsilon_0 > 0$ настолько малым, что

$$\|T_i^j(\xi, \varepsilon) - T_i^j(\xi, 0)\| < \gamma, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0], \ i \in \overline{1, m}.$$

Обозначая $T_0^j(\xi, \varepsilon) \equiv 0$ и $T_{m+1}^j(\xi, \varepsilon) \equiv T$, при любом $i \in \overline{1, m+1}$ имеем

$$f(t, x(t, u(t, \xi, \varepsilon), 0), \varepsilon) \to f(t, x(t, \xi, 0), 0) \quad \text{при } \varepsilon \to 0$$

равномерно на $[T_{i-1}^j(\xi,0)+\gamma, T_i^j(\xi,0)-\gamma]$, в частности мы можем уменьшить $\varepsilon_0>0$ настолько, что

$$\|f(t,x(t,u(t,\xi,\varepsilon),0),\varepsilon)-f(t,x(t,\xi,0),0)\|<\sigma,$$

при всех $[T_{i-1}^j(\xi,0)+\gamma, T_i^j(\xi,0)-\gamma]$, $\xi\in B_\delta(\xi_0)$, $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$, $i\in\overline{1,m+1}$. Таким образом,

$$\begin{aligned}&\mathrm{mes}\,\{t\in[0,T]:\|f(t,x(t,u(t,\xi,\varepsilon),0),\varepsilon)-f(t,x(t,\xi,0),0)\|\geq\sigma\}\leq\\ &\leq(m+1)\cdot 2\gamma,\quad \text{при всех } \xi\in B_\delta(\xi_0),\ \varepsilon\in[0,\varepsilon_0].\end{aligned}$$

Поскольку $\gamma>0$ было выбрано произвольно, следствие доказано. □

Следствие 0.3 *В условиях леммы 0.1 имеем $\overline{f}(\xi)=x_\varepsilon'(T,\xi,0)$, в частности функция $\overline{f}$ непрерывно дифференцируема на $B_\delta(v_0)$.*

Доказательство. Имеем

$$u(T,\xi,\varepsilon)=\xi+\varepsilon\int_0^T(x_u'(\tau,u(\tau,\xi,\varepsilon),0))^{-1}f(\tau,x(\tau,u(\tau,\xi,\varepsilon),0),\varepsilon)d\tau,$$

поэтому,

$$\begin{aligned}u_\varepsilon'(T,\xi,0)&=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{u(T,\xi,\varepsilon)-u(T,\xi,0)}{\varepsilon}=\\ &=\lim_{\varepsilon\to0}\int_0^T(x_u'(\tau,u(\tau,\xi,\varepsilon),0))^{-1}f(\tau,x(\tau,u(\tau,\xi,\varepsilon),0),\varepsilon)d\tau.\end{aligned}$$

В силу непрерывности функции u и ограниченности функции f, подынтегральное выражение равномерно ограничено по $\tau\in[0,T]$, $\xi\in B_\delta(\xi_0)$ и $\varepsilon\in[0,\delta)$. Значит, следствие 0.2 позволяет применить теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла и прийти к заключению

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_0^T(x_u'(\tau,u(\tau,\xi,\varepsilon),0))^{-1}f(\tau,x(\tau,u(\tau,\xi,\varepsilon),0),\varepsilon)d\tau=\overline{f}(\xi),$$

завершающему доказательство. □

Теорема 0.1 *Пусть $h\in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ и каждое решение порождающей системы (2) T-периодично. Пусть f – T-периодическая по времени непрерывно дифференцируемая функция, терпящая разрывы 1-го рода на S, точнее, пусть выполнено условие (A1). Зададимся $\xi_0\in\mathbb{R}^n$, удовлетворяющим (A2), то есть таким, что при каждом $t\in[0,T]$ и $j\in\overline{1,n}$ решение $t\mapsto x(t,\xi_0,0)$ порождающей системы (2) пересекает не более одной гиперплоскости разрыва функции f^j и такие пересечения происходят только при $t\in(0,T)$. Пусть, наконец, решение $x(\cdot,\xi_0,0)$ пересекает S трансверсально, то есть выполнено условие (A3). Тогда имеют место следующие утверждения:*

1) *Если $\overline{f}(\xi_0)=0$ и $\det\|\overline{f}'(\xi_0)\|\neq0$, то существуют $\delta>0$ и $\varepsilon_0>0$ такие, что при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ система (8) имеет единственное T-периодическое решение u_ε с начальным условием $u_\varepsilon(0)\in B_\delta(\xi_0)$.*

2) Если в условиях пункта 1) все собственные значения матрицы $\overline{f}'(\xi_0)$ имеют отрицательные вещественные части, то решения $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)}$ асимптотически устойчивы.

3) Если в условиях пункта 1) хотя бы одно собственное значение матрицы $\overline{f}'(\xi_0)$ имеет положительную вещественную часть, то решения $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)}$ неустойчивы.

Доказательство. Положим

$$\overline{f}_\varepsilon(\xi) = \int_0^T (x'_u(\tau, u(\tau,\xi,\varepsilon),0))^{-1} f(\tau, x(\tau, u(\tau,\xi,\varepsilon),0),\varepsilon)d\tau,$$

тогда

$$u(T,\xi,\varepsilon) = \xi + \varepsilon\overline{f}_\varepsilon(\xi) = u'_\xi(T,\xi,0) + \varepsilon\overline{f}_\varepsilon(\xi). \tag{9}$$

Поэтому,

$$\frac{u'_\xi(T,\xi,\varepsilon) - u'_\xi(T,\xi,0)}{\varepsilon} = (\overline{f}_\varepsilon)'(\xi).$$

В силу леммы 0.1 имеем $\dfrac{u'_\xi(T,\xi,\varepsilon) - u'_\xi(T,\xi,0)}{\varepsilon} \to u''_{\xi\varepsilon}(T,\xi,0)$ при $\varepsilon\to 0$ равномерно по $\xi\in B_\delta(\xi_0)$. Следовательно, учитывая заключение следствия 0.3,

$$(\overline{f}_\varepsilon)'(\xi) \to (\overline{f})'(\xi) \quad \text{при } \varepsilon\to 0$$

равномерно по $\xi\in B_\delta(\xi_0)$.

1) Начнем с доказательства утверждения 1). Другими словами, требуется показать, что существует $\varepsilon_0>0$ и $\delta>0$ такие, что при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ функция $\xi\mapsto u(T,\xi,\varepsilon)-\xi$ имеет единственный нуль в $B_\delta(\xi_0)$. В силу формулы (9) достаточно установить данное утверждение для функции $\overline{f}_\varepsilon(\xi)$. Но в силу условия 2) теоремы это утверждение немедленно следует из теоремы о неявной функции.

2) Перейдем к вопросу об устойчивости найденных решений. Для этого изучим собственные значения матрицы $u'_\xi(T,\xi_\varepsilon,\varepsilon)$. Имеем

$$u'_\xi(T,\xi_\varepsilon,\varepsilon) = I + \varepsilon(\overline{f}_\varepsilon)'(\xi_\varepsilon).$$

Предположим, что вещественные части всех собственных значений матрицы $(\overline{f})'(\xi_0)$ отрицательны. Пусть λ_0 – какое-нибудь собственное значение матрицы $(\overline{f})'(\xi_0)$ и λ_ε – какое-нибудь собственное значение матрицы $(\overline{f})'(\xi_\varepsilon)$, сходящееся при $\varepsilon\to 0$ к λ_0. Тогда $1+\varepsilon\lambda_\varepsilon$ будет являться собственным значением матрицы $I+\varepsilon(\overline{f}_\varepsilon)'(\xi_\varepsilon)$. Но $\lambda_\varepsilon = \lambda_0+\delta_\varepsilon$, где $\delta_\varepsilon\to 0$ при $\varepsilon\to 0$, значит $1+\varepsilon\lambda_\varepsilon = 1+\varepsilon\lambda_0+\varepsilon\delta_\varepsilon$. Так как $\mathrm{Re}(\lambda_0)<0$, то существует $\varepsilon_0>0$ такое, что $\mathrm{Re}(1+\varepsilon\lambda_\varepsilon)<0$ при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$. Таким образом, при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ собственные значения матрицы $u'_\xi(T,\xi_\varepsilon,\varepsilon)$ лежат в единичном шаре. Зафиксируем $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$ и обозначим через $\|\cdot\|_0$ такую норму в $\mathbb{R}^n$, что

$$\sup_{\|\zeta\|_0\le 1} \|u'_\xi(T,\xi_\varepsilon,\varepsilon)\zeta\|_0 \le q < 1$$

(см. [6], с. 90, лемма 2.2). Тогда найдется $\delta > 0$ такое, что

$$\sup_{\|\zeta\|_0 \le 1} \|u'_\xi(T,\xi,\varepsilon)\zeta\|_0 \le \widetilde{q} < 1 \quad \text{для всех } \xi \in B_\delta(\xi_\varepsilon).$$

Следовательно, будем иметь

$$\|u(T,\xi_1,\varepsilon) - u(T,\xi_2,\varepsilon)\|_0 \le \widetilde{q}\|\xi_1 - \xi_2\|_0, \quad \xi_1, \xi_2 \in B_\delta(\xi_0),$$

что означает (см. [7], лемма 9.2) асимптотическую устойчивость периодического решения u_ε.

3) Пусть теперь матрица $(\overline{f})'(\xi_0)$ допускает собственное значение с положительной вещественной частью. Рассуждая аналогично предыдущему пункту, приходим к существованию такого $\varepsilon_0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ матрица $u'_\xi(T,\xi_\varepsilon,\varepsilon)$ допускает собственное значение λ_ε с б/'ольшей единицы вещественной частью. Зафиксируем $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$. На основании теоремы Гробмана-Хартмана (см., напр., [9], теорема 4.1) существует $\lambda > 0$ и локальный гомеоморфизм $g : B_\alpha(\xi_\varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ такой, что

$$u(T,\xi,\varepsilon) = g^{-1}(u'_\xi(T,\xi_\varepsilon,\varepsilon)g(\xi)), \quad \xi \in B_\alpha(\xi_\varepsilon), \tag{10}$$

соответственно для p-й степени оператора $\xi \mapsto u(T,\cdot,\varepsilon)$ имеем

$$u^p(T,\xi,\varepsilon) = g^{-1}((u'_\xi(T,\xi_\varepsilon,\varepsilon))^p g(\xi)), \quad \xi \in B_\alpha(\xi_\varepsilon).$$

Пусть $l \in \mathbb{R}^n$ – собственный вектор матрицы $u'_\xi(T,\xi_\varepsilon,\varepsilon)$, соответствующий собственному значению λ_ε и такой, что $g^{-1}(u'_\xi(T,\xi_\varepsilon,\varepsilon)l)$ определено. Из (10) имеем $g(\xi_\varepsilon) = u'_\xi(T,\xi_\varepsilon,\varepsilon)g(\xi_\varepsilon)$, то есть $g(\xi_\varepsilon) = 0$ и, значит, $g^{-1}(l) \ne \xi_\varepsilon$. Поэтому, для доказательства неустойчивости достаточно предъявить такую сходящуюся к ξ_ε последовательность $\{\zeta_p\}_{p\in\mathbb{N}}$, что

$$u^p(T,\zeta_p,\varepsilon) = g^{-1}(l), \quad p \in \mathbb{N}.$$

Требуемой последовательностью является, например,

$$\zeta_p = g^{-1}\left(\frac{1}{\lambda^p} l\right), \quad p \in \mathbb{N}.$$

Действительно, так как $\xi_\varepsilon = g^{-1}(0)$, то $\zeta_p \to \xi_\varepsilon$ при $p \to \infty$, и, далее,

$$\begin{aligned} u^p(T,\zeta_p,\varepsilon) &= g^{-1}\left((u'_\xi(T,\xi_\varepsilon,\varepsilon))^p g\left(g^{-1}\left(\frac{1}{\lambda^p}l\right)\right)\right) = \\ &= g^{-1}\left((u'_\xi(T,\xi_\varepsilon,\varepsilon))^p \frac{1}{\lambda^p} l\right) = g^{-1}\left(\lambda^p \frac{1}{\lambda^p} l\right) = g^{-1}(l). \end{aligned}$$

Теорема доказана полностью. □

Так как замена (7) T-периодична, то в условиях теоремы 0.1 функция $x_\varepsilon(t) = x(t, u_\varepsilon(t), 0)$ является T-периодическим решением системы (1) и решение x_ε устойчиво или неустойчиво вместе с u_ε. Для удобства ссылок сформулируем это утверждение в виде теоремы.

Теорема 0.2 *Пусть выполнены условия теоремы 0.1. Тогда утверждения 1), 2) и 3) этой теоремы имеют место и для системы (1).*

0.3 Колебания скорости тела, перемещаемого периодическими вибрациями

В этой секции теорема 0.2 иллюстрируется на примере доказательства периодичности и устойчивости колебаний скорости тела в механической модели из рисунка 2. Уравнение

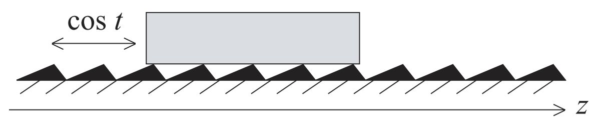

Рис. 2. Механическая система, в которой сила сухого трения имеет значение $-\varepsilon a < 0$ при движении тела вправо и значение $\varepsilon b > 0$ при движении тела влево, где $a \neq b$. Движение происходит за счет горизонтальной вибрации с амплитудой $\cos t$.

движения тела записывается (см. [5]) в виде

$$\ddot{z} = \cos t - a\varepsilon E(\dot{z}) + b\varepsilon E(-\dot{z}), \quad \text{где } E(\dot{z}) = (\mathrm{sign}(\dot{z}) + 1)/2. \tag{11}$$

Замена $x = \dot{z}$ приводит систему (11) к системе вида (1)

$$\dot{x} = \cos t - a\varepsilon E(x) + b\varepsilon E(-x). \tag{12}$$

Значит, $S = \{0\}$, $x(t, \xi_0, 0) = -\xi_0 \sin t$ и условия теоремы 0.2 выполнены для любого $\xi_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Функция $\overline{f}$ имеет вид (см. [5])

$$\overline{f}(\xi) = -4(a+b)\arcsin(\xi) + 2\pi(a-b),$$

откуда $\xi_0 = \sin\left(\frac{a-b}{a+b}\pi\right)$ и $(\overline{f})'(\xi_0) = -2\frac{a+b}{\left|\cos\left(\frac{a-b}{a+b}\pi\right)\right|} < 0$. Следовательно, при $a > b$ ($a < b$) тело движется вправо (влево) с π-периодически изменяющейся асимптотически устойчивой скоростью.

Работа поддержана грантом BF6M10 Роснауки и CRDF (программа BRHE) и грантом МК-1620.2008.1 Президента РФ молодым кандидатам наук. Исследования проведены в ходе стажировки автора в Институте Проблем Управления РАН под руководством проф. В.Н. Тхая и финансируемой грантом РФФИ 08-01-90704-моб_ст.

Литература

[1] Бабицкий В.И., Крупенин В.Л. Колебания в сильно нелинейных системах. – М.: Физматлит, 1985, – 320 с.

[2] Боголюбов Н.Н. О некоторых статистических методах в математической физике. Акад. Наук Укр. ССР, 1945, – 139 с.

[3] Bolotnik N., Pivovarov M., Zeidis I., Zimmermann K. Controlled motions of mechanical systems induced by vibration and dry friction, 6th ENOC CDRom proceedings, 2008.

[4] Feckan M. Bifurcation of periodic solutions in differential inclusions // Appl. Math. – 1997. V. 42. – P. 369–393.

[5] Fidlin A. On the asymptotic analysis of discontinuous systems // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. – 2002. V. 82, №2. – P. 75–88.

[6] Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений, М.: Физматлит, 1962, – 394 с.

[7] Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений, М.: Физматлит, 1966, – 331 с.

[8] Thomsen J. J., Fidlin A. Near-elastic vibro-impact analysis by discontinuous transformations and averaging // J. Sound Vibration – 2008. V. 311. – P. 386–407.

[9] Палис Ж., Ди Мелу В. Геометрическая теория динамических систем, М.:Мир, 1986, – 301 с.

[10] Плотников В.А. Усреднение дифференциальных включений // Укр. мат. жур. – 1979. Т. 31, №5. – Р. 573-576.